Några uppgifter om komplexa tal med radianer

1. Omvandla mellan radianer och grader. *Svara exakt!*

a) 15°

b) $3\ rad$

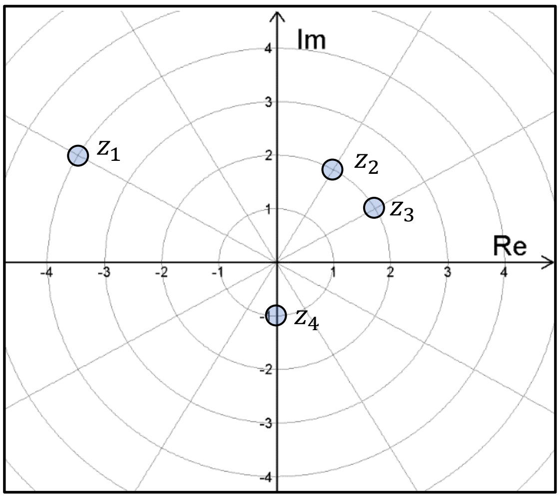
c) 40°

d) $\frac{\pi}{9}\ rad$

e) $\frac{5\pi}{12}\ rad$

f) 9°

2. I det komplexa talplanet nedan visas fyra komplexa tal.

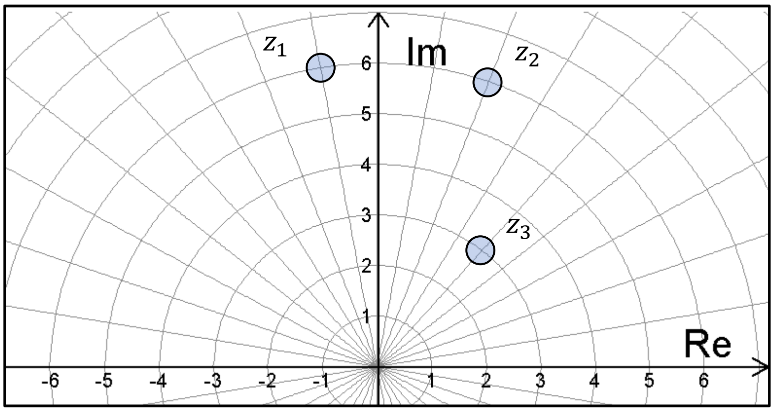


a) Ange z_1, z_2, z_3 och z_4 på polär form med *argumentet i radianer*

b) Beräkna $\arg(z_2 \cdot z_3)$

c) Beräkna $z_4 \cdot z_3$

3. I det komplexa talplanet nedan visas tre komplexa tal.



a) Ange talen på polär form med *argumentet i radianer*

b) Beräkna z_1/z_2 och ange svaret på polär form med *argumentet i radianer*

4. Låt talen $z_1 = 2 \cdot \left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sin\frac{3\pi}{4}\right)$ och $z_2 = 3 \cdot \left(cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi}{3}\right)$

a) Beräkna ${z_1}^2$ och ange svaret på polär form med *argumentet i radianer*

b) Beräkna $z_1 \cdot z_2$ och ange svaret på polär form med *argumentet i grader*

c) Beräkna z_2/z_1 och ange svaret på polär form med *argumentet på valfri form*.

5. Lös ekvationen $z^4 = (81, \pi)$ och ange svaren på polär form med *argumentet i radianer*

6. Complexia tittar på de båda talen $z_1 = (4, 60°)$ och $z_2 = \left(2, -\frac{5\pi}{6}\right)$.
Complexia påstår att ${z_2}^2$ är samma tal som z_1.
Undersök om hon har rätt.

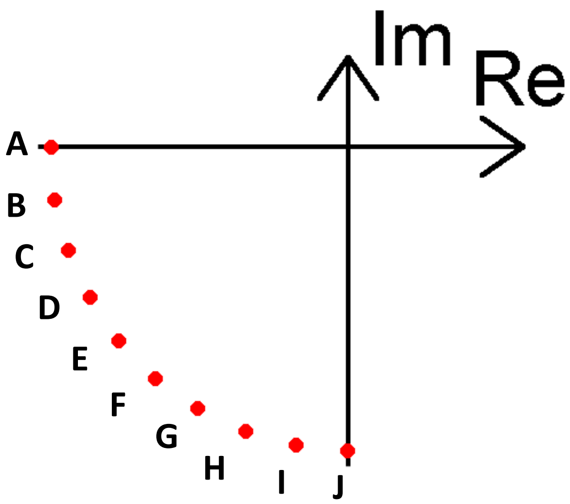
7. Figuren visar en del av ett komplext talplan med de 10. punkterna **A - J** markerade. Samtliga punkter ligger på en mittpunktscirkel med radie 1.

Någon eller några av punkterna visar lösningar till ekvationen

$$\boldsymbol{z^6 = w}$$

där $\arg(w) = \frac{2\pi}{3}$

Vilka är dessa punkter?



8. Uttrycken $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ och $1 \leq |z| \leq 3$ kommer tillsammans att avgränsa ett område i det komplexa talplanet.

Beräkna arean av detta område.

FACIT - Några uppgifter om komplexa tal med radianer

1. a) $15^{\circ} = 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{15\pi}{180}$

b) $3\,rad = 3 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{540}{\pi}{}^{\circ}$

c) $40^{\circ} = 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$

d) $\frac{\pi}{9}\,rad = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180}{9} = 20°$

e) $\frac{5\pi}{12}\,rad = \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{5 \cdot 180}{12} = \frac{900}{12} = \frac{225}{6}{}^{\circ}$

f) $9° = 9 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{9\pi}{180} = \frac{\pi}{20}$

2. a) $z_1 = (4, \frac{5\pi}{6})$ $\quad z_2 = (2, \frac{\pi}{3})$ $\quad z_3 = (2, \frac{\pi}{6})$ $\quad z_4 = (1, -\frac{\pi}{2})$

b) $\arg(z_2 \cdot z_3) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

c) $z_4 \cdot z_3 = \left(1 \cdot 2, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(2, -\frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(2, -\frac{2\pi}{6}\right) = \left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$

3. Det är 10° mellan två streck. $10° = \frac{\pi}{18}$. Räkna sedan antalet streck.

a) $z_1 = (6, \frac{10\pi}{18})$ $\quad z_2 = (6, \frac{7\pi}{18})$ $\quad z_3 = (3, \frac{5\pi}{18})$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(6, \frac{10\pi}{18})}{(6, \frac{7\pi}{18})} = (1, \frac{3\pi}{18})$

4. $z_1 = 2 \cdot \left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sin\frac{3\pi}{4}\right)$ och $z_2 = 3 \cdot \left(cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi}{3}\right)$

a) ${z_1}^2 = \left(2, \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \left(4, \frac{6\pi}{4}\right) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right)$

b) $z_1 \cdot z_2 = \left(2, \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \left(3, \frac{2\pi}{3}\right) = \left(6, \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \left(6, \frac{9\pi}{12} + \frac{8\pi}{12}\right) = \left(6, \frac{17\pi}{12}\right)$

$\frac{17\pi}{12} = \frac{17\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{3060}{12} = 255°$

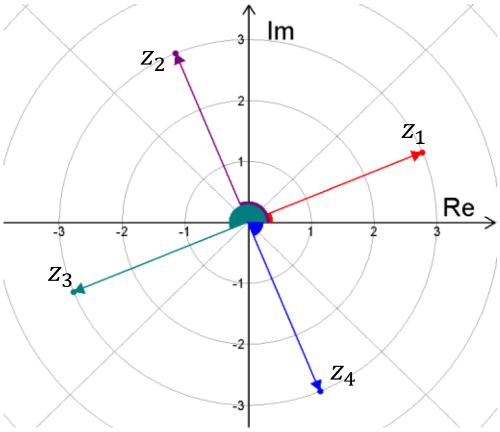
Svaret blir $(6, 255°)$

c) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)}{\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{8\pi}{12} - \frac{9\pi}{12}\right) = \left(1{,}5; -\frac{\pi}{12}\right) = (1{,}5; -15°)$

5. Första lösningen, $z_1 = \left(3, \frac{\pi}{4}\right)$

Vinkeln mellan två lösningar, $\alpha = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Alla lösningar: $z_1 = \left(3, \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad z_2 = \left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\quad z_3 = \left(3, \frac{5\pi}{4}\right)$ $\quad z_4 = \left(3, \frac{7\pi}{4}\right)$



6. För att veta om det är samma tal gäller att såväl vinkel som avstånd stämmer överrens. Skriv då antingen om z_1 till radianer eller z_2 till grader.

$z_2 = \left(2, -\frac{5\pi}{6}\right) = (2, -150°)$.
${z_2}^2 = (4, -300°)$.

Eftersom $-300°$ är samma vinkel som $60°$ och avstånden stämmer överrens, så är de båda talen samma tal, och Complexia har alltså rätt.

7. Jobba antingen i radianer eller grader. Intuitivt känns det lättast (iaf för mig) att göra om den givna vinkeln till grader och därefter jobba helt i grader.

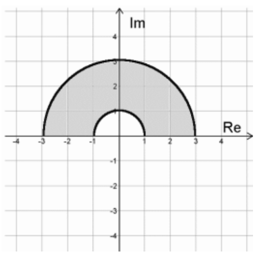
Argumentet till den första lösningen, z_1 fås som $\frac{\arg(w)}{6} = \frac{120°}{6} = 20°$

Återstående lösningar har en skillnad på $\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$

Detta ger argumenten hos lösningarna
$z_2 = 80°$ $\quad z_3 = 140°$ $\quad z_4 = 200°$ $\quad z_5 = 260°$ $\quad z_6 = 320°$

Detta innebär bland punkten i den utritade tredje kvadranten,
att lösningarna är C och I

8. Ritas området ut fås (typ):



Arean blir då möjlig att bestämma genom
en halvcirkel med ett halvcirkelformat hål, dvs $Arean = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4 \cdot \pi$